福井大学
工学部　研究報告
第26巻　第2号
昭和53年9月

プラズマ波の不安定性に対する不均一磁場の効果

田　中　文　治※・出　原　敏　孝※・石　田　美　雄※

Effect of the Nonuniformity of Magnetic Field on the Instability of Plasma Wave

Mataharu TANAKA, Toshitaka IDEHARA and Yoshio ISHIDA

The dispersion relation of the electron plasma wave of the beam-plasma system in nonuniform magnetic field is derived under the assumption of cold beam and cold plasma. The maximum growth rate of the instability ascribed to the mode coupling between the plasma wave and the space charge wave of beam is calculated from the relation. It depends on the nonuniformity of field. When the wave propagates along the increasing field intensity, it decreases, and vice versa. The result is compared with the experimental results reported recently.

1．序　論

電子ビーム・プラズマ系において、ビーム波とプラズマ波がモード結合を起して生ずる波の不安定性に対する研究は、ここ数年来、非常に多くの人達によってなされている。[1)] この現象は系を構成する全粒子の集団運動によって起きる波動と、波動の位相速度に等しい速度をもった特定の粒子 ─共鳴粒子─ との相互作用によって理解され、特に、波動が成長して大振幅となり、共鳴粒子を捕促した場合に起きる波動と共鳴

※　応用物理学科

粒子の非線形相互作用の研究が精力的に行われている。[2] 研究の対象となる波動の種類も多岐にわたるが、プラズマ電子のみが寄与する高周波数領域の代表的なプラズマ波として、電子ベルンシュタイン波およびトリベルピース波が研究され、[3],[4] 主として電子ビームの空間電荷波とのモード結合による不安定性が最も顕著な不安定性として興味深い。

現在までのこの分野の研究を概観すると、均一磁場中に置かれたプラズマに電子ビームを磁場の方向と平行な方向に入射した最も単純な系での研究が大部分を占め、電子ビームが磁場に斜めに入射された場合や不均一磁場中に系が置かれた場合のようなやや複雑な系における研究はほとんどない。

われわれはこのような場合の波の不安定性について研究を進めており、プラズマ波の不安定性に及ぼす不均一磁場の影響に関する実験結果を最近報告した。[5] この報告の概要は、1. 不均一磁場中の波の増幅率は不均一度の増加に共なって減少すること、および、2. 不安定性によって増幅したプラズマ波が不均一磁場中を伝わる際に、プラズマ電子による局所的なサイクロトロン共鳴吸収を受けることを実験的に検証したことである。前者の実験結果は、磁場の傾きからプラズマ電子に加わる力によって、電子の集団運動に補正項が加わることに起因していると思われ、本論文ではこの立場からこの現象に対する考察を試みる。

次節では、磁場の不均一がプラズマの移動度テンソルにおよぼす影響を、基礎方程式より出発して考察する。 3 節では、不均一磁場中における電子ビーム・プラズマ系の波動の分散式を、電子ビームとプラズマ電子の熱運動を無視した近似（冷たい電子ビーム・プラズマ系の近似）のもとで導出する。 4 節では、電子ビームの密度がプラズマ電子の密度に比べて小さいと仮定して、この分散式を解析し、波の増幅率に対する不均一磁場の効果を考察する。 5 節では、参考文献5）において報告した実験結果との比較を行なう。

2. 不均一磁場の効果を考慮した移動度テンソル

ここでは、簡単のためにプラズマも電子ビームも温度が 0 として解析を行なう。 まず電子ビームのふるまいについて調べる。 温度が 0 という仮定のほかに、イオンは静止しているものとする。 磁場 B は z 軸方向にかけられており、その傾きは $\partial B_z / \partial z$ で表わされる。 マックスウエルの方程式より、

$$\nabla\cdot\underset{\sim}{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

である。　磁場の傾きは z 方向と x 方向にあるとすると、 $\partial B_y/\partial y = 0$ すなわち

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial x} \qquad (2)$$

となる。　ここで、傾きは小さく、二次以上の項は無視でき、$x = z = 0$ では $B_z = B_0$, $B_x = 0$ とすると、 $B_z = B_0 + (\partial B_z/\partial z)\, z$, $B_x = -(\partial B_z/\partial z)\, x$ である。　以上の仮定より、電子の運動方程式は

$$\frac{\partial \underset{\sim}{v}}{\partial t} + (\underset{\sim}{v}_0\cdot\underset{\sim}{\nabla})\,\underset{\sim}{v} = -\frac{q}{m}\underset{\sim}{E} - \frac{q}{m}(\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}) \qquad (3)$$

となる。　ビームの速度は、一定の速度 $\underset{\sim}{v}_0$ と一次の摂動項 $\underset{\sim}{v}$ の和で表される。　摂動項を $\exp j(\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{r} - \omega t)$ と仮定する。　(3) 式で摂動項の微分を実行すれば

$$j\omega'\underset{\sim}{v} - \frac{q}{m}(\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{B}) = \frac{q}{m}\underset{\sim}{E} \qquad (4)$$

となる。　ただし、ここで $\omega' = \omega - \underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{v}_0$ であり、ドップラー・シフトした周波数を表わす。　(4) 式を各成分にわけて、移動度テンソル $\underset{\approx}{\mu}$ を求めると、

$$\underset{\sim}{v} = \underset{\approx}{\mu}\cdot\underset{\sim}{E} \qquad (5)$$

ここで、 $\underset{\approx}{\mu}$ は

$$\underset{\approx}{\mu} = \frac{q}{m}\begin{pmatrix} j\omega', & -\omega_{c0}(1 + K_B z), & 0 \\ \omega_{c0}(1 + K_B z), & j\omega', & \omega_{c0}K_B x \\ 0, & -\omega_{c0}K_B x, & j\omega' \end{pmatrix}^{-1}$$

となる。　ここで、 $z = 0$ でのサイクロトロン周波数を $\omega_{c0} = qB_0/m$， 磁場の傾きの項を $(1/B_0)(\partial B_z/\partial z) = K_B$ で表わした。

3. 不均一磁場中における電子ビーム・プラズマ系中の波の分散式の導出

(5)式より、 v_x, v_y, v_z を求めると、

$$v_x = -\frac{j}{\omega'}\frac{q}{m}\frac{\omega'^2 E_x - j\omega'\omega_c E_y + \omega_{c0}^2 K_B x E_z}{\omega'^2 - \omega_c^2}$$

$$v_y = \frac{q}{m}\frac{\omega_c E_x - j\omega' E_y + \omega_{c0} K_B x E_z}{\omega'^2 - \omega_c^2} \tag{6}$$

$$v_z = -\frac{j}{\omega'}\frac{q}{m}\frac{\omega_{c0}^2 K_B x E_x - j\omega'\omega_{c0} K_B x E_y + (\omega'^2 - \omega_c^2)E_z}{\omega'^2 - \omega_c^2}$$

となる。 (6) 式で K_B^2 の項は微小として省略した。

また、ω_{C0} ($1 + K_{BZ}$)は Z=Z の点でのサイクロトロン周波数となり、これを ω_{CZ} とし、添字の Z は省いて表わしている。

連続の式は

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + (\underset{\sim}{v}_0 \cdot \nabla)\, n_1 + n_0 \nabla \cdot \underset{\sim}{v} = 0 \tag{7}$$

である。 $\underset{\sim}{v}$ の項には摂動項の他に変数がはいっているので、その微分も考慮に入れると、(7) 式は

$$-j\omega' n_1 + n_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} + jn_0 k_x v_x + jn_0 k_y v_y + jn_0 k_z v_z = 0 \tag{8}$$

となる。 この式に (6) 式の v_x, v_y, v_z を代入すると、 n_1 は、

$$n_1 = \frac{1}{\omega'^2}\frac{q}{m} n_0 \frac{1}{\omega'^2 - \omega_c^2}\,\Phi$$

$$\times (\, j\omega_{c0}^2 K_B k_z - \omega'^2 + 2\omega_{c0}^2 K_B x k_x k_z - \omega_c^2 k_z^2 \,) \tag{9}$$

となる。 (9) 式で、 $\underset{\sim}{E} = -\nabla\Phi$ であり、$\Phi \propto \exp j\,(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$ で示されている。 次に、 (9) 式をポアソンの式

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{10}$$

に代入すると、

$$1-\frac{\omega_p^2}{\omega'^2-\omega_c^2}\frac{k_x^2}{k^2}-\frac{\omega_p^2}{\omega'^2-\omega_c^2}\frac{k_y^2}{k^2}-\frac{\omega_p^2}{\omega'^2}\frac{k_z^2}{k^2}$$

$$+j\frac{\omega_p^2\omega_{c0}^2}{\omega'^2(\omega'^2-\omega_c^2)}\frac{K_Bk_z}{k^2}-\frac{2\omega_p^2\omega_{c0}^2K_Bx}{\omega'^2(\omega'^2-\omega_c^2)}\frac{k_xk_z}{k^2}=0 \quad (11)$$

が導びかれる。 この (11) 式が不均一磁場中におけるビーム中の波の一般的な分散式である。 この式で $K_B\to 0$ とすると、一様磁場における冷たいプラズマ中の波（速度 $\underset{\sim}{v}_0$ で動いている）の分散式となる。 ここで、 $x=0$ 、つまり z 軸上での波のふるまいを考えるならば、 (11) 式の左辺の最後の項は 0 となる。 このことは実験で円筒状の電子ビーム・プラズマ系の中心軸上で、波動のふるまいを観測したことに対応している。

次に、電子ビームの空間電荷波とのモード結合による不安定性（チエレンコフ励起）のみに注目すると分散式は、

$$1+\varepsilon_p+\varepsilon_b=0, \quad (12)$$

$$\varepsilon_p=-\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2}\frac{k_\perp^2}{k^2}-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{k_\parallel^2}{k^2}+j\frac{\omega_p^2\omega_{c0}^2}{\omega^2(\omega^2-\omega_c^2)}\frac{K_Bk_\parallel}{k^2}$$

$$\varepsilon_b=-\frac{\omega_b^2}{(\omega-k_\parallel v_0)^2}\frac{k_\parallel^2}{k^2}+j\frac{\omega_b^2\omega_{c0}^2}{(\omega-k_\parallel v_0)^2\{(\omega-k_\parallel v_0)^2-\omega_c^2\}}\frac{K_Bk_\parallel}{k^2}$$

となる。 ここで、 ε_p と ε_b はプラズマ電子、および電子ビームの誘電率を表わし、 $k_x^2+k_y^2=k_\perp^2$, $k_z=k_\parallel$ とした。

4. 不均一磁場の波の増幅率への影響

今ビームの密度 ω_b^2 ($\propto n_b$) は小さいとして、 (12) 式の分散式を考える。 プラズマのモードとビームのモードが交わる点の付近でモード結合により、最大成長率が生ずると考えられる。 プラズマモードとビーム波の分散曲線が交わる周波数を ω_m とする。 ビームの密度は小さいとしたので、プラズマの分散式

$$1+\varepsilon_p=0 \quad (13)$$

がビームの存在によりわずかに、乱されたとする。 その効果による周波数のずれを

$$\omega - \omega_m = \omega_c \delta \qquad (\delta << \omega_m/\omega_c) \tag{14}$$

とする。 そして（ 13 ）式を $\omega = \omega_m$ でテーラー展開し、最初の 2 項を書くと、

$$1 + \varepsilon_p = \omega_c \delta \left. \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_m}$$

$$= H_p \delta \tag{15}$$

となる。 ここで、 H_p は

$$H_p = 2 \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} \frac{1}{g^2 + x^2} \left(\frac{g^2 x}{(x^2-1)^2} + \frac{1}{x} - j \frac{\omega_{c0}^2 K_B v_0}{\omega_c^3} \frac{2x^2 - 1}{(x^2-1)^2} \right) \tag{16}$$

$$g = \frac{k_\perp v_0}{\omega_c}, \quad x = \frac{\omega_m}{\omega_c}$$

であらわされる。 次に、ビームの誘電率を考える。 今、 K_B は微小量と考えているので、ビームの誘電率の中の K_B を含む項は、その他のプラズマの項や、ビームの項に比べて小さいと見ることができる。 そこで、簡単のためにこの項を省略すると、ビームの誘電率は、

$$\varepsilon_b = - \frac{\omega_b^2}{(\omega - k_\parallel v_0)^2} \frac{k_\parallel^2}{k^2} \tag{17}$$

となる。 （ 15 ）式と（ 17 ）式より、交点付近での電子ビーム・プラズマ系の分散式は

$$H_p \delta - \frac{\omega_b^2}{(\omega - k_\parallel v_0)^2} \frac{k_\parallel^2}{k^2} = 0 \tag{18}$$

のように表わされる。 今プラズマモードとビームのモードの交点付近を考えているので、ビームと波動との共鳴条件

$$\omega - k_\parallel v_0 \simeq 0 \tag{19}$$

が成りたつ。 そこで、$\omega - k_\parallel v_0 = \nu$ として、ν を微小とすると、$\nu = \omega_c \delta$ となる。
この関係を使って（ 18 ）式を解くと、

$$\delta^3 = \frac{\omega_b^2}{2\omega_p^2} \frac{x^4 (x^2-1)^2}{g^2x^3 + x(x^2-1)^2 - j\omega_{c0}^2 K_B v_0 (2x^2-1)/\omega_c^3} \tag{20}$$

となる。 (20) 式を解いて、 δ の虚数部をとれば、これが最大増幅率 γ_{max} になる。

(20) 式より δ を導出し、最大増幅率に相当する項を求めると、

$$\delta = \left\{ \frac{\omega_b^2 x^4 (x^2-1)^2}{2\omega_p^2 \{g^2x^3+x(x^2-1)^2} \right\}^{1/3} \left\{ 1 - j \frac{K_B v_0}{\omega_c} \frac{\omega_{c0}^2}{\omega_c^2} \frac{2x^2-1}{g^2x^3+x(x^2-1)^2} \right\}^{-1/3}$$

$$\cdot \left\{ \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} \right\} \tag{21}$$

となる。 (21) 式の分母にある K_B の項は小さいとしてテーラー展開をし、δ の虚部である最大増幅率 γ_{max} を求めると、

$$\gamma_{max} = \omega_c \, \mathrm{Im}\, \delta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c \left\{ \frac{\omega_b^2 x^4 (x^2-1)^2}{2\omega_p^2 \{g^2x^3+x(x^2-1)^2} \right\}^{1/3} \left\{ 1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{K_B v_0}{\omega_c} \frac{\omega_{c0}^2}{\omega_c^2} \frac{2x^2-1}{g^2x^3+x(x^2-1)^2} \right\} \tag{22}$$

となる。 この式で物理量を正とするなら負となりうる項は K_B の項だけである。 すなわち $K_B > 0$ のときは明らかに増幅率は一様磁場 ($K_B = 0$) に比べて減少する。 逆に $K_B < 0$ のときは、増幅率は大きくなる。

以上考察してきたことから、不均一磁場が波の増幅率に本質的に影響することがわかる。

5. 実験結果との比較

前節までの考察を参考文献 5) の実験結果と比較しょう。 電子ビームの進行方向に磁場強度が増加するような配位、即ち $K_B > 0$ なる条件のもとで行われた結果が、 Fig .3 に示されている。 図からわかるように、 K_B の増大とともに波動の増幅率 $k_{\parallel i}$ は減少している。 観測された増幅率は空間的なものであり、前節で求めた増幅率 γ_{max} は時間的なものである。 両者の間には、

$$\gamma_{max} = \frac{\partial\omega}{\partial k_\parallel} k_{\parallel i} \tag{23}$$

なる関係がある。 観測された増幅波は電子ビームの空間電荷波とのモード結合によるものであるから、電子ビームとの共鳴条件

$$\omega = k_{\parallel} v_0 \tag{24}$$

を満たす。 すなわち、$\partial\omega / \partial k_{\parallel} = v_0$ となるから、

$$\gamma_{max} = v_0 \, k_{\parallel i} \tag{25}$$

となる。 前節で求めた γ_{max} は実験結果より求めた $k_{\parallel i}$ に比例することになる。参考文献 5) の Fig. 3 の結果は $k_{\parallel i}$ が K_B にほぼ比例して減少する項を含んでいることを暗示しており、K_B (> 0) の増加と共に γ_{max} が減少するという前節の結果と定性的に一致している。

参考文献

1) 例えば、 R . J . Briggs : Electron - Stream Interaction with Plasma. M . I . T . Press, Cambridge, Massachusetts (1964) .

2) 例えば、 T . Idehara, M. Takeda and Y. Ishida : J. Phys. Soc. Japan 39 (1975) 213.

3) I. B. Bernsten : Phys. Rev. 109 (1958) 10.

4) A. W. Trivelpiece and R. W. Gould : J. Appl. Phys. 30 (1959) 1784.

5) M. Tanaka, T. Idehara and Y. Ishida : Memoirs of the Faculty of Engineering, Fukui University 25 (1977) 73.